Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 3(1) (2015), 41-50

Zadaci sa brojevima 2015 i 2016

Dimitrije I. Spasić
Učenik gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
spasic.dimitrije.3@outlook.com

Aleksandra B. Simić
Učenik gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
anasimic99@gmail.com

Jovana D. Krstić
Učenik gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
jovana.krstic5@outlook.com

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu
Gimnazija „Svetozar Marković“ u Nišu
dsimce@gmail.com

Poštovani đaci i ljubitelji matematike, nadamo se da će vam ovi zadaci očvrsnuti želju za radom i promišljanjem i da će rešavanje ponuđenih zadataka poboljšati kvalitet matematičkog razmišljanja i dovesti vas do lakšeg i elegantnijeg rešenja. Nadamo se, takođe, da ćete otkriti svoje sklonosti i sposobnosti, pokrenuti dovitljivost i doživeti napetost i trijumf pronalazača. Jer – ko jednom okusi radost u matematici...

Zadatak 1. *Dokazati da je broj* $1^{2015}+2^{2015}+3^{2015}+\cdots+2015^{2015}$ *deljiv sa* 2015.

Rešenje: U ovom zbiru jedan sabirak, 2015^{2015}je deljiv sa 2015. Ako uočimo da se preostalih 2014 sabiraka mogu grupisati u grupe od po dva sabirka, 1^{2015} i 2014^{2015}, 2^{2015} i 2013^{2015},... i iskoristimo poznatu relaciju $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}\cdot b+\cdots+a\cdot b^{2n-1}-b^{2n})$, $n\in\mathbb{N}$, dobićemo još 1007 sabiraka deljivih sa 2015, pa će ceo zbir biti deljiv sa 2015.

Zadatak 2. *Dokazati da je* 2015,999...=2016.

Rešenje: Radi kraćeg pisanja, označimo sa broj $2015{,}999\ldots$ sa a. Množenjem ovog broja sa 10 dobijamo $10a=20159{,}999\ldots$, odnosno $10a=18144+a$, odakle je $a=\frac{18144}{9}=2016$.

Zadatak 3. *Odrediti prirodne brojeve koji imaju osobinu da je njihov zbir jednak njihovom proizvodu i jednak broju 2015.*

Rešenje: Kako je $2015=5\cdot 13\cdot 31$, moguće su sledeće kombinacije:

$$5+13+31+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1966}=5\cdot 13\cdot 31\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{1966}=2015$$

$$65+31+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1919}=65\cdot 31\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{1919}=2015$$

$$155+13+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1847} = 155\cdot 13\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots\cdot 1}_{1847} = 2015$$

$$5+403+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1607} = 5\cdot 403\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots\cdot 1}_{1607} = 2015$$

Zadatak 4. *Odrediti vrednost polinoma* $P(x,y) = x^{2015} + 2016\,y$, *ako je* $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

Rešenje: Razlaganjem uslova zadatka $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$ dobijamo da je $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$, odakle, blagodareći činjenici da je zbir kvadrata dva realna broja jednak nuli akko su oba broja jednaka nuli, zaključujemo da je $x = -1$ i $y = 2$. Zamenom ovih vrednosti dobija se $P(-1,2) = (-1)^{2015} + 2016\ \cdot 2\ = 4031$.

Zadatak 5. *Koliko ima brojeva manjih od* 10^{2015} *čija se vrednost ne menja bilo da se broj čita sleva udesno ili sdesna ulevo?*

Rešenje: Traženi broj može imati $2n$ ili $2n-1$ cifara, i tada ima oblik $xyz \ldots aa \ldots zyx$ ili $xyz \ldots a \ldots zyx$.

U oba slučaja imamo po $9\cdot \underbrace{10\cdot 10\cdot \ldots\cdot 10}_{n-1} = 9\cdot 10^{n-1}$ brojeva. Dakle, brojeva koji su manji od 10^{2015} ima

$$9+9+9\cdot 10 + 9\cdot 10 + 9\cdot 10^2 + 9\cdot 10^2 + \cdots + 9\cdot 10^{1006} + 9\cdot 10^{1006} + 9\cdot 10^{1007} =$$

$$18(1 + 10 + 10^2 + \cdots 10^{1006}) + 9\cdot 10^{1007} = 18\ \frac{10^{1007}-1}{9} + 9\cdot 10^{1007} = 11\cdot 10^{1007} - 2.$$

Napomena: Brojevi ovog oblika nazivaju se palindromski brojevi.

Zadatak 6. *Da li među brojevima od* 1 *do* 10^{2015} *ima više onih kod kojih je zbir cifara jednak* 2, *ili onih kod kojih je prozvod cifara jednak* 2?

Rešenje: Tražeći brojeve čiji je zbir cifara jednak 2, mi ustvari tražimo broj n-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde je $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$, $x_i \in \mathbb{N}, x_1 \neq 0$. Tražena rešenja su oblika

$$(1,1,0,\ldots,0,0,0), (1,0,1,\ldots,0,0,0), \ldots\ , (1,0,0,\ldots,0,1,0), (1,0,0,\ldots,0,0,1) \text{ i } (2,0,0,\ldots,0,0,0).$$

Ovih brojeva ima n.

Sličnim razmišljanjem zaključujemo da i brojeva čiji je proizvod cifara jednak 2 takođe ima n. To su sledeće n-torke:

$$(1,2,1,\ldots,1,1,1),\ (1,1,2,\ldots,1,1,1), \ldots\ , (1,1,1,\ldots,1,2,1), (1,1,1,\ldots 1,1,2) \text{ i } (2,1,1,\ldots,1,1,1).$$

I jednih i drugih brojeva ima po $1 + 2 + \cdots + 2015 = 1008\cdot 2015$.

Zadatak 7. *Rastaviti na činioce izraz* $x^4 + 2016\,x^2 + 2015\,x + 2016$.

Rešenje: Dodavanjem i oduzimanjem monoma x^3 i korišćenjem formule za razliku kubova, dati izraz postaje

$$x^4 + 2016\,x^2 + 2015\,x + 2016 = x^4 + x^3 + x^2 + 2015\,(x^2 + x + 1) + 1 - x^3$$

$$= x^2(x^2 + x + 1) + 2015\,(x^2 + x + 1) + (1 - x)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 2016).$$

Zadatak 8. *Da li je moguće da površina trougla čije su sve stranice veće od* 2015cm *bude manja od* 1cm^2?

Rešenje: Naredni primer će nam dati potvrdan odgovor na prethodno pitanje. Neka je dat jednakokraki trougao $ABC, AC = BC$, kod koga je $AB = 5000\;cm$ i visina $CC_1 = \frac{1}{5000}\,cm$.

Tada je $P_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CC_1}{2} = \frac{1}{2}\,cm^2$, a $AC = BC > \frac{AB}{2} = 2500\;cm > 2015\;cm$.

Zadatak 9. Dokazati da broj $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2014} + 2^{2015}$ pri deljenju sa 15 ima ostatak 14.

Rešenje: Ako uočimo da je $a_1 = 2, q = 2$ i $n = 2015$, primenom formule za zbir prvih n članova geometrijskog niza $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, dobijamo da je $S_{2015} = 2\,\frac{1-2^{2015}}{1-2} = 2^{2016} - 2$.

Kako je $2^{2016} \equiv_{15} (2^4)^{504} \equiv_{15} 1$, dobijamo da je $S_{2015} \equiv_{15} 14$.

Zadatak 10. *Uprostiti izraz*

$$A = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2014} - x^{2015} + \frac{x^{2016}}{1 + x}$$

i izračunati njegovu vrednost za $x = -\frac{2014}{2015}$.

Rešenje: Dati izraz je jednak

$$A = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2014} - x^{2015} + \frac{x^{2016}}{1 + x}$$

$$= \frac{1 + x - x(1 + x) + x^2(1 + x) - \cdots + x^{2014}(1 + x) - x^{2015}(1 + x) + x^{2016}}{1 + x}$$

$$= \frac{1 + x - x - x^2 + x^2 + x^3 - \cdots + x^{2015} - x^{2015} - x^{2016} + x^{2016}}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}.$$

Za $x = -\frac{2014}{2015}$ dobijamo da je vrednost izraza $A = 2015$.

Zadatak 11. $Dokazati\ da\ je$ $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{2015 \cdot 2018} < \frac{1}{6}$.

Rešenje: $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot 2018}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{3}{2015\cdot 2018}\right)=$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\frac{11-8}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{2018-2015}{2015\cdot 2018}\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2018}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2018}\right)<\frac{1}{6}.$$

Zadatak 12. *Dokazati da je*

$$2015+\left(-\frac{1}{2!}\right)^2+\left(-\frac{1}{3!}\right)^4+\left(-\frac{1}{4!}\right)^6+\left(-\frac{1}{5!}\right)^8+\cdots+\left(-\frac{1}{100!}\right)^{198}<2016.$$

Rešenje: Jednostavnim transformacijama početnu nejednakost svodimo na

$\left(\frac{1}{2!}\right)^2+\left(\frac{1}{3!}\right)^4+\left(\frac{1}{4!}\right)^6+\left(\frac{1}{5!}\right)^8+\cdots+\left(\frac{1}{100!}\right)^{198}<1$, odakle, koristeći činjenice da je $\left(\frac{1}{n!}\right)^a\leq\left(\frac{1}{n}\right)^a$ i $\left(\frac{1}{n}\right)^a<\left(\frac{1}{n}\right)^b$, $a,b,n\in\mathbb{N}$, $a>b$, dobijamo da je

$$\left(\frac{1}{2!}\right)^2+\left(\frac{1}{3!}\right)^4+\left(\frac{1}{4!}\right)^6+\left(\frac{1}{5!}\right)^8+\cdots+\left(\frac{1}{100!}\right)^{198}$$

$$<\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^6+\left(\frac{1}{5}\right)^8+\cdots+\left(\frac{1}{100}\right)^{198}$$

$$<\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{100}\right)^2.$$

Sada, kako znamo da je $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ i $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\,(n+1)}, n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, imamo da je

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{100}\right)^2<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}<1.$$

Time je početna nejednakost dokazana.

Zadatak 13. *Dokazati da je*

$$\log 1-\log 2+\log 3-\log 4+\cdots+\log 2015-\log 2016<-1.$$

Rešenje: Neka je $A=\log 1-\log 2+\log 3-\log 4+\cdots+\log 2015-\log 2016$. Primenom osnovnih pravila logaritmovanja imamo da je $A=\log\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2015}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2016}$. Kako je

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \cdots, \frac{2015}{2016} < \frac{2016}{2017}$, imamo da je $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2015}{2016} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2017}$, odnosno $2A < \log \frac{1}{2017} < \log \frac{1}{100} = -2$, odakle je $A < -1$.

Zadatak 14. *Dokazati da je* $\log_{2015} \log_{2015} \underbrace{\sqrt[2015]{\sqrt[2015]{\cdots \sqrt[2015]{2015}}}}_{2015} = -2015.$

Rešenje: Neka je $\log_{2015} \log_{2015} \underbrace{\sqrt[2015]{\sqrt[2015]{\cdots \sqrt[2015]{2015}}}}_{2015} = -x$. Odavde, koristeći osobinu logaritma imamo da je $\log_{2015} \underbrace{\sqrt[2015]{\sqrt[2015]{\cdots \sqrt[2015]{2015}}}}_{2015} = \left(\frac{1}{2015}\right)^x$, odnosno $\underbrace{\sqrt[2015]{\sqrt[2015]{\cdots \sqrt[2015]{2015}}}}_{2015} = 2015^{\left(\frac{1}{2015}\right)^x}$. Odavde, koristeći osobinu korena imamo da je $2015^{\left(\frac{1}{2015}\right)^{2015}} = 2015^{\left(\frac{1}{2015}\right)^x}$, odakle zaključujemo da je $x = 2015$.

Zadatak 15. *Naći faktorizaciju najmanjeg prirodnog broja koji ima tačno* 2015 *različitih delilaca*.

Rešenje: Neka je n prirodan broj i $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ njegova kanonska faktorizacija, gde su p_i prosti brojevi, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ $(i \in \overline{1,k})$. Broj delilaca broja n je $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Kako je $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, moguća predstavljanja broja 2015 su:

$$2015 = 2015; 2015 = 5 \cdot 403; 2015 = 13 \cdot 155; 2015 = 65 \cdot 31; 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Svakom od ovih predstavljanja odgovara po jedan najmanji prirodan broj sa tačno 2015 različitih delilaca. Upoređivanjem njihovih faktorizacija

$$n_1 = 2^{2014};\ n_2 = 2^{402} \cdot 3^4;\ n_3 = 2^{154} \cdot 3^{12};\ n_4 = 2^{64} \cdot 3^{30};\ n_5 = 2^{30} \cdot 3^{12} \cdot 5^4$$

zaključujemo da je n_5 najmanji od ovih brojeva.

Tražena faktorizacija najmanjeg prirodnog broja koji ima tačno 2015 različitih delilaca je $2^{30} \cdot 3^{12} \cdot 5^4$.

Zadatak 16. *Izračunati* $2 \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{504} + 1\right)\sqrt{504 - \sqrt{2017 - 2\sqrt{2016}}}}$.

Rešenje: Kako je $2017 - 2\sqrt{2016} = (\sqrt{2016} - 1)^2$ imamo da je

$$2 \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{504} + 1\right)\sqrt{504 - \sqrt{2017 - 2\sqrt{2016}}}} =$$

$$2 \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{504} + 1\right)\sqrt{504 - (\sqrt{2016} - 1)}} = 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{504} + 1\right)\sqrt{505 - \sqrt{2016}}},$$

a kako je $505 - \sqrt{2016} = \left(\sqrt{504} - 1\right)^2$, izraz postaje

$$2 \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{504} + 1\right)(\sqrt{504} - 1)} = \sqrt{2016}.$$

Zadatak 17. *Milica i Uroš igraju igru "Ko će pre do* 2015*?". Milica otpočinje igru I bira bilo koji broj od* 1 *do* 9*. Uroš nastavlja igru tako što na prvobitni btoj doda neki broj od* 1 *do* 9 *i tako dalje ... Pobednik je onaj ko pre stigne do* 2015*. Ko će pobediti ako uspostavi optimalnu strategiju, Milica ili Uroš*?

Rešenje: Ako Milica izabere broj 5, onda ona kontroliše niz $5, 15, 25, \ldots, 2005, 2015$, tako što na svaki Urošev broj doda komplement do 10. Prema tome, ako za prvi broj izabere 5, i poštuje prethodnu strategiju, Milica sigurno pobeđuje.

Zadatak 18. *Na Kopaoniku su radile tri mašine za pravljenje veštačkog snega. Posle nekog vremena druga mašina se pokvarila, a nakon dva sata rada ostale dve mašine, napravljeno je* 2016m^2 *snega. Odrediti posle koliko vremena se pokvarila druga mašina ako se zna da prva i druga mašina obave istu količinu posla za četiri sata, druga i treća za* 5 *sati i da je druga mašina duplo brža od treće.*

Rešenje: Radi lakšeg rešavanja, uvešćemo novu veličinu, snagu, označenu sa p, koja će predstavljati odnos napravljene količine snega u jedinici vremena (h označava jedinicu vremena a x traženo vreme). Na osnovu uslova zadatka imamo da je

$$x(p_1 + p_2 + p_3) + 2h(p_1 + p_3) = 2016\, m^2,$$
$$4h(p_1 + p_2) = 2016\, m^2, 5h(p_2 + p_3) = 2016\, m^2, p_2 = 2p_3.$$

Zamenom odnosa nepoznatih u jednačinama dobijamo da je $p_3 = 134{,}4\, \frac{m^2}{h}, p_2 = 268{,}8\, \frac{m^2}{h}$ i $p_1 = 235{,}2\, \frac{m^2}{h}$, odakle uvrštavanjem u prvu jednačinu dobijamo da je $x = 2h$. Dakle, druga mašina se pokvarila dva sata nakon početka rada.

Zadatak 19. *Odrediti rešenja jednačine* $2^a - 2b^2 = 2016$ *u skupu celih brojeva.*

Rešenje: Jednostavno se zaključuje da je $a \geq 11$. Deljenjem jednačine sa 2 dobijamo da je $2^{a-1} - b^2 = 1008$, odakle, kako su 2^{a-1} i 1008 deljivi sa 16, sledi da i b^2mora da bude deljivo sa 16.

Početna jednačina sada glasi $2^{a-5} - k^2 = 63$, gde je $k = \frac{b}{4}$. Kako je $k^2 \equiv_3 1$, a mora da bude neparan broj.

Formiranjem razlike kvadrata i rastavljanjem broja 63 na činioce dobijamo da je $\left(2^{\frac{a-5}{2}}-k\right)\left(2^{\frac{a-5}{2}}+k\right)=1\cdot 63=3\cdot 21=7\cdot 9$

- Ako je $2^{\frac{a-5}{2}}+k=63$ i $2^{\frac{a-5}{2}}-k=1$ i obrnuto, sabiranjem jednačina dobijamo da je $2^{\frac{a-5}{2}}=32$, odnosno da je $a=15$, pa je odatle $k=\pm 31, b=\pm 124$.
- Ako je $2^{\frac{a-5}{2}}+k=21$ i $2^{\frac{a-5}{2}}-k=3$ i obrnuto, nema rešenja.
- Ako je $2^{\frac{a-5}{2}}+k=9$ i $2^{\frac{a-5}{2}}-k=7$ i obrnuto, sabiranjem jednačina dobijamo da je $2^{\frac{a-5}{2}}=8$, odnosno da je $a=11$, pa je odatle $k=\pm 1, b=\pm 4$.

Dakle, jednačina ima četiri rešenja: $(a,b)\in\{(11,4),(11,-4),(15,124),(15,-124)\}$.

Zadatak 20. *Zbir trocifrenog i četvorocofrenog palindroma iznosi* 2015. *Odredi te brojeve.*

Rešenje: Kako su palindromi četvorocifren $\overline{ABBA}$ i trocifren $\overline{CDC}$ broj, lako se zaključuje da je $A=1$ i $C=4$, jer bismo u suprotnom, da je $A=2$, došli do kontradikcije. Odavde imamo da je $\overline{1BB1}+\overline{4D4}=2015$, odakle je $110\,B+10\,D=610$. Proverom dobijamo da je $B=5$ i $D=6$. Traženi brojevi su 1551 i 464.

Zadatak 21. *Rešiti jednačinu* $p¡\cdot q¡^{a}\cdot r¡^{b}=2016\cdot s¡$, *ako važi da je* $b¡=a\cdot b$; $a\neq b$ *prosti brojevi*; *p, q, r, s su različiti prosti brojevi, a* $p¡$ *predstavlja proizvod prostih brojeva ne većih od p.*

Rešenje: Kako je $b¡=a\cdot b$ i a i b su različiti prosti brojevi, zaključujemo da je $a=2$ i $b=3$.

Sada početna jednačina postaje $\frac{p¡\cdot q¡^{2}\cdot r¡^{3}}{s¡}=2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$.

Kako $2|k¡$, za svaki prost broj k, mora da važi da je $r=2$ (u suprotnom bismo imali kontradikciju).

Kako $5\nmid 2016$, na levoj strani jednačine ne sme da se nađe broj 5, pa zato važi da je $p\geq 5$ i $s\geq 5$ i $q=3$.

Kako $7|2016$, zaključujemo da je $s<7$, odakle je $s=5$ i $p=7$.

Zadatak 22. *Odrediti ostatak pri deljenju polinoma* $P(x)=x^{2016}-2015x^{2015}-2014$ *polinomom* $f(x)=x^2-2016x+2015$.

Rešenje: Na osnovu Euklidovog algoritma znamo da je ostatak $r(x)=ax+b$ najviše prvog stepena i imamo da je

$$P(x)=x^{2016}-2015x^{2015}-2014=(x-1)\cdot(x-2015)\cdot Q(x)+ax+b.$$

Odavde je $P(1)=-4028=a+b$ i $P(2015)=-2014=2015a+b$, odakle se, rešavanjem jednostavnog sistema dobija da je $a=1$ i $b=-4029$.

Dakle, traženi ostatak je $r(x)=x-4029$.

Zadatak 23. *Da li postoji bijekcija* $f\colon R\to R$ *takva da za svako* $x\in R$ *važi*

$f(f(x)) - f(x) = 156\,x + 2015$?

Rešenje: Linearna funkcija $f: R \to R$, $f(x) = kx + n$ je bijekcija akko je $k \neq 0$. Tada je $f(f(x)) - f(x) = k(kx + n) + n - (kx + n) = (k^2 - k)x + kn$. Ako za neku funkciju važi da je $f(f(x)) - f(x) = 156\,x + 2015$, sledi da je $k^2 - k = 156$ i $kn = 2015$. Jedno od rešenja (celobrojno) je $k = 13$ i $n = 155$, pa je jedna od traženih funkcija (bijekcija) $f(x) = 13x + 155$.

Zadatak 24. *Dokazati da je* 2016. *član Fibonačijevog niza deljiv sa* 2016.

Rešenje: Podsetimo da je Fibonačijev niz (F_n) definisan sledećom relacijom:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, n \in N_0.$$

Sada konstruišemo niz (R_n) čiji su elementi dati relacijom:

$$R_0 = F_0 = 1, R_1 = F_1 = 1, R_{n+2} = (R_n + R_{n+1})\ mod\ M, \qquad n, M \in N_0.$$

Nije teško pokazati da $R_n = F_n\ mod\ M$, odnosno sada možemo generisati niz ostataka pri deljenju *n*-tog člana Fibonačijevog niza prirodnim brojem *M*.
Posmatrajmo nizove ostataka članova Fibonačijevog niza pri deljenju sa 2,4,6,7,8,9 i 32.
Niz ostataka pri deljenju sa 2 je **1, 1, 0**, 1,1,0, ..., odakle vidimo da se ponavlja niz od tri broja, pa zaključujemo da je 2016. član niza deljiv sa 2.
Niz ostataka pri deljenju sa 4 je **1, 1, 2, 3, 1, 0**, 1,1,2,3,1,0, ..., odakle vidimo da se ponavlja niz od šest brojeva, pa zaključujemo da je 2016. član niza deljiv sa 4.
Niz ostataka pri deljenju sa 7 je **1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0**, 1,1,2,3,5,1,6,0,6, 6,5,4,2,6,1,0, ..., odakle vidimo da se ponavlja niz od šesnaest brojeva, pa zaključujemo da je 2016. član niza deljiv sa 7.
Niz ostataka pri deljenju sa 8 je **1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0**, 1,1,2,3,5,0,5,5,2,7,1,0, ..., odakle vidimo da se ponavlja niz od dvanaest brojeva, pa zaključujemo da je 2016. član niza deljiv sa 8.
Niz ostataka pri deljenju sa 9 je **1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0**, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0, ... , odakle vidimo da se ponavlja niz od 24 broja, pa zaključujemo da je 2016. član niza deljiv sa 9.
Niz ostataka pri deljenju sa 32 je **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 2, 23, 25, 16, 9, 25, 2, 27, 29, 24, 21, 13, 2, 15, 17, 0, 17, 17, 2, 19, 21, 8, 29, 5, 2, 7, 9, 16, 25, 9, 2, 11, 13, 24, 5 29, 2, 31, 1, 0,** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 2, 23, 25, 16, 9, 25, 2, 27, 29, 24, 21, 13, 2, 15, 17, 0, 17, 17, 2, 19, 21, 8, 29, 5, 2, 7, 9, 16, 25, 9, 2, 11, 13, 24, 5 29, 2, 31, 1, 0, ... , odakle vidimo da se ponavlja niz od četrdeset osam brojeva, pa zaključujemo da je 2016. član niza deljiv sa 32.

Kako je $2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7$, 2016. član Fibonačijevog niza je deljiv sa 2016.

Napomena: Fibonačijev niz predstavlja rekurzivno definisan niz u kome su prva dva člana jednaka 1, a svaki naredni član jednak zbiru prethodna dva.

Zadatak 25. *Odrediti prirodne brojeve koji zadovoljavaju jednakost*

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{2015}{}^2 = 2050.$$

Rešenje: Iz uslova zadatka je očigledno da su neki od brojeva $x_1, x_2, \cdots, x_{2015}$ jednaki 1.

Neka je $x_1, x_2, \cdots, x_k \neq 1$ i $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2015} = 1$. Tada je $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_k{}^2 \geq 4k$ i $x_{k+1}{}^2 + x_{k+2}{}^2 + \cdots + x_{2015}{}^2 = (2015 - k) \cdot 1$, odnosno $2050 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{2015}{}^2 \geq 3k + 2015$, odakle zaključujemo da je $k \leq 11$.

Dakle, $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{11}{}^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{2004} = 2050$, odakle sledi da je

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{11}{}^2 = 46.$$

Neka među brojevima $x_1, x_2, \cdots, x_{11}$ ima njih a sa vrednošću 1, b sa vrednošću 2, c sa vrednošću 3, d sa vrednošću 4, e sa vrednošću 5 i f sa vrednošću 6. Tada je

$$a \cdot 1 + b \cdot 4 + c \cdot 9 + d \cdot 16 + e \cdot 25 + f \cdot 36 = 46 \text{ i } a + b + c + d + e + f = 11.$$

Oduzimanjem dobijamo $3b + 8c + 15d + 24e + 35f = 35$.

- Ako je $f = 1$, imamo da je $b = c = d = e = 0$ i $a = 10$, odakle je

$$6^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{2014} = 2050.$$

- Ako je $f = 0$, imamo da je $3b + 8c + 15d + 24e = 35$. Odavde, ako je:
  1. $e = 1$, imamo $3b + 8c + 15d = 11$, odakle, kako je $d = 0$, dobijamo da je $b = c = 1$, odnosno $2^2 + 3^2 + 5^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{2012} = 2050$.
  2. $e = 0$, imamo $3b + 8c + 15d = 35$.
     Sada, za $d = 0$ imamo da je $b = 1, c = 4$, odnosno $b = 9, c = 1$, odnosno
     $2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{2010} = 2050$ i
     $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{2005} = 2050.$
     Za $d = 1$ imamo da je $3b + 8c = 20$, $b = 4, c = 1$, odnosno
     $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{2009} = 2050.$

LITERATURA

[1] Andrić, V., *Matematika X = 1236, Priručnik za pripremanje za takmičenje učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda*, Krug, Beograd 2006.

[2] Baltić, V., Đukić, D., Krtinić, Đ., Matić, I., *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd 2008.

[3] Bogoslavov, Vene, T, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[4] Branković, S. B., *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole*, odabrana poglavlja, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.

[6] Društvo matematičara Srbije, *Matematički list za učenike osnovnih škola*, brojevi 5 i 6 godina 1998/99.

[7] Kadelburg, Z., Mićić, V., Ognjanović, S., *Analiza sa algebrom 2*, Krug, Beograd 2002.

[8] Kadelburg, Z., Mladenović, P., *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, Beograd 1990.

[9] Mićić,V., Kadelburg, Z., Đukić, D., *Uvod u teoriju brojeva, materijali za mlade matematičare, sveska 15*, DMS, Beograd 2004.

[10] Simjanović, D. J, Veljković, M.D, Golubović, K.S, *Zanimljivi zadaci o broju 2015*, Matematika i informatika 2 (4) (2015) 1-13.

[11] Simjanović, D. J, Vesić, N.O, *Zanimljivi algebarski zadaci sa brojem 2012*, Nastava matematike, LVII_1-2, (2012) 45-51

[12] Stanić, M., Ikodinović, N., *Teorija brojeva – zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2004.

[13] *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici „Zadaci iz matematike" časopisa *Tangenta* 1995–2005. godine, priredio B. Popović, DMS, Beograd 2006.